

1. Demuestre que si todos los pesos de una gráfica ponderada G son distintos, entonces G tiene un único árbol óptimo.

Demostración. Sea $G = (V, E)$ una gráfica ponderada con función peso $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $w(e) \neq w(f)$ siempre que $e \neq f$ y T un árbol óptimo. Tomemos otro árbol generador T' distinto y sea e la arista de menor peso en $E(T) \triangle E(T')$. Supongamos que $e \in E(T) \setminus E(T')$.

Como T' es un árbol, al agregar e se crea un ciclo C en $T' + e$. Si todas las aristas de C estuvieran en T este no sería un árbol por lo que debe de existir una arista

$$f \in E(C) \cap (E(T') \setminus E(T)).$$

Notemos $T'' := (T' + e) - f$ es un árbol porque quitar f rompe el ciclo C y conserva la conexidad. Comparando pesos, se tiene $w(e) < w(f)$ por como lo elegimos. Por tanto,

$$w(T'') = w(T') + w(e) - w(f) < w(T').$$

En particular, T' no puede ser óptimo, ya que existe un árbol generador T'' de menor peso.

Si suponemos que $e \in E(T') \setminus E(T)$ un proceso análogo concluiría que T no es un árbol óptimo, contradiciendo la elección de T .

Concluimos que si un árbol generador es óptimo, este debe ser igual a T . $\square$

2. Demuestre que una gráfica es escindible si y sólo si es la gráfica de intersección de una familia de subárboles de una estrella.

Demostración. $\square$

3. Sea G una gráfica con k componentes conexas. Demuestre que el rango de la matriz de incidencia de G sobre $\mathbb{Z}_2$ es $|V| - k$.

Demostración. Sea $G = (V, E)$, $\mathcal{B}$ su matriz de incidencia, $C = (V(C), E(C))$ una componente conexa de G y $e \in E$. Si $e \notin E(C)$, en su columna correspondiente en $\mathcal{B}$ todas las entradas en las filas correspondientes de $V(C)$ son 0. Si $e \in E(C)$, entonces e tiene exactamente dos extremos en $V(C)$ y por tanto en la columna correspondiente aparecen exactamente dos unos. En cualquier caso la suma de las entradas de la columna e es 0. Es decir, la suma no trivial de los renglones asociados a vértices de $V(C)$ es el vector cero, dicho de otra forma, forman un conjunto linealmente dependiente.

Como hay k componentes, hay a lo más $|V| - k$ renglones linealmente independientes, por lo tanto

$$\text{rank}(\mathcal{B}) \leq |V| - k.$$

Sea F un bosque generador de G (F contiene un árbol generador T_i por cada componente conexa). F tiene exactamente $|V| - k$ aristas ya que cada árbol tiene $|V(T_i)| - 1$. Sea $\mathcal{B}_F$ la submatriz de $\mathcal{B}$ formada por las columnas correspondientes a las aristas de F , entonces

$$\text{rank}(\mathcal{B}) \geq \text{rank}(\mathcal{B}_F).$$

Sea $T = (V(T), E(T))$ un árbol en F con matriz de incidencia $\mathcal{B}_T$. Probemos por inducción sobre $|V(T)|$ que

$$\text{rank}(\mathcal{B}_T) = |V(T)| - 1.$$

Si $|V(T)| = 1$, entonces $\mathcal{B}_T$ es la matriz vacía y su rango es $0 = |V(T)| - 1$. Supongamos ahora $|V(T)| = \ell + 1$, sea v una hoja y e la única arista incidente en v . En la fila correspondiente a v la única entrada igual a 1 está en la columna de e y todas las demás entradas son 0. Por lo tanto eliminar la fila de v y la columna de e disminuye el rango en 1 y se obtiene la matriz de incidencia de $T - v$ (un árbol con ℓ vértices). Por hipótesis inductiva, dicha matriz tiene rango $\ell - 1$, así que

$$\text{rank}(\mathcal{B}_T) = 1 + (\ell - 1) = (\ell + 1) - 1.$$

Como cada árbol es independiente de los demás, el rango de $\mathcal{B}_F$ es la suma de los rangos en cada componente, es decir

$$\text{rank}(\mathcal{B}_F) = \sum_{i=1}^k \text{rank}(\mathcal{B}_{T_i}).$$

Por lo probado anteriormente

$$\text{rank}(\mathcal{B}_{T_i}) = |V(T_i)| - 1$$

Y

$$\sum_{i=1}^k |V(T_i)| = |V|$$

Por lo que

$$\text{rank}(\mathcal{B}_F) = \sum_{i=1}^k \text{rank}(\mathcal{B}_{T_i}) = \sum_{i=1}^k (|V(T_i)| - 1) = |V| - k.$$

En particular, $\text{rank}(\mathcal{B}) \geq |V| - k$. Junto a la primera desigualdad probada concluimos que

$$\text{rank}(\mathcal{B}) = |V| - k.$$

□

4. Para una gráfica conexa G definimos la gráfica de árboles de G , $\mathcal{T}_G$, como la gráfica que tiene por vértices a todos los árboles generadores de G , y tal que, si $S, T \in V(\mathcal{T}_G)$, entonces ST es una arista de $\mathcal{T}_G$ si y sólo si existen aristas $e \in E \setminus E(T)$ y $f \in E(T) \setminus E$ tales que $(S - e) + f = T$. Demuestre que $\mathcal{T}_G$ es conexa.

Demostración. Sean $D, L \in V(\mathcal{T}_G)$ distintos. Probemos por inducción sobre $|E(D) \setminus E(L)|$ que existe una DL -trayectoria en $\mathcal{T}_G$.

Si $|E(D) \setminus E(L)| = 2$ (no pueden diferir solo en una arista ya que ambos tienen $|V(G)| - 1$ aristas) entonces existe $f \in E(D) - E(L)$ y $e \in E(L) - E(D)$ y

$$D - f + e = L$$

Por lo que luego $DL \in E(\mathcal{T}_G)$ y en particular es una DL -trayectoria.

Si $|E(D) \setminus E(L)| = \ell$ existe $e \in E(D) - E(L)$, como L es un árbol, al agregar e se crea un ciclo C en $L + e$. Si todas las aristas de C estuvieran en D este no sería un árbol por lo que debe de existir una arista

$$f \in E(C) \cap (E(L) \setminus E(D)).$$

Sea $L' = (L + e) - f$ este es también un árbol ya que tiene $|V(G)| - 1$ aristas y es acíclico además difiere en $\ell - 2$ aristas con D , por hipótesis de inducción, existe P una DL' -trayectoria en $\mathcal{T}_G$ y como $L' = L + e - f$ entonces $LL' \in E(\mathcal{T}_G)$ por lo que $P(LL')$ es una DL -trayectoria en $\mathcal{T}_G$ y por lo tanto $\mathcal{T}_G$ es conexa. $\square$

5. Sea G una gráfica conexa y e una arista de G que no sea un lazo. Exhiba una biyección entre el conjunto de árboles generadores de G que contienen a e y el conjunto de árboles generadores de G/e . Si G es una gráfica ponderada, la biyección debe preservar la propiedad de ser un árbol óptimo.

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de árboles generadores de G que tienen a $e = uv$, $\mathcal{B}$ el conjunto de árboles generadores de G/e y $\hat{e}$ el vértice correspondiente a la arista e en G/e .

Definamos $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $f(T) = T/e$ de forma que si $xu \in E(T)$ con $x \neq v$, entonces en $f(T)$ aparece una arista entre x y $\hat{e}$, que recordamos como la arista proveniente de xu . De manera análoga, si $xv \in E(T)$, entonces en $f(T)$ aparece una arista entre x y $\hat{e}$ distinta de la anterior. Primero, dado $T \in \mathcal{A}$ tenemos que $V(T) = V(G)$ y $V(f(T)) = V(G/e)$.

Por otro lado, como T es acíclico $f(T)$ debe serlo también ya que si hubiera un ciclo C en $f(T)$ si este no contiene a $\hat{e}$ entonces C es también un ciclo en T y si contiene a $\hat{e}$ entonces $C + e$ es un ciclo en T , de cualquier manera obtendríamos un ciclo en T contradiciendo que sea un árbol.

Finalmente $|E(f(T))| = |E(T)| - 1 = (|V(G)| - 1) - 1 = |V(G/e)| - 1$ por lo que $f(T)$ es árbol generador de G/e , es decir, f está bien definida.

Definamos ahora $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ como sigue. Sea T'' la gráfica obtenida de $T' \in \mathcal{B}$ reemplazando a $\hat{e}$ por dos vértices u y v y reemplazando cada arista $x\hat{e}$ de T' por una arista que une x con u o con v en G (según la arista original de G que se contrae a $x\hat{e}$). Entonces

$$g(T') := T'' + e.$$

Dado $T' \in \mathcal{B}$, como es conexa, $g(T')$ sigue siendo conexa ya que si dos vértices eran conexos mediante un camino que no pasaba por $\hat{e}$ estos siguen siendo conexos en $g(T')$ por el mismo camino y si eran conexos mediante un camino que utilizaba $\hat{e}$ estos son conexos por un camino resultante de agregar e entre los vértices que formaban $\hat{e}$. Además,

$$|E(g(T'))| = |E(T')| + 1 = (|V(G/e)| - 1) + 1 = |V(G)| - 1,$$

por lo que $g(T')$ es un árbol generador de G y contiene a e , entonces g está bien definida.

Finalmente por construcción

$$g(f(T)) = T.$$

Y

$$f(g(T')) = T'.$$

Por lo tanto f es biyectiva. $\square$

6. Modifique el algoritmo BFS para que regrese una bipartición de la gráfica (si la gráfica es bipartita) o un ciclo impar (si la gráfica no es bipartita). Escriba el pseudocódigo y verifique que es correcto.

Demostración. $\square$

7. Sea $\mathcal{T}$ una familia de subárboles de un árbol T . Demuestre que si cualesquiera dos elementos de $\mathcal{T}$ tienen un vértice en común, entonces hay un vértice de T que está en todos los elementos de $\mathcal{T}$.

Demostración. Procedamos por inducción sobre $|V(T)|$.

Si $|V(T)| = 1$, entonces T tiene un único vértice t y todo subárbol de T es $\{t\}$. En particular, t pertenece a todos los elementos de $\mathcal{T}$.

Supongamos ahora que $|V(T)| \geq 2$. Sea ℓ una hoja de T y p su único vecino. Definamos el árbol

$$T' := T - \ell,$$

y para cada $A \in \mathcal{T}$ definamos $A' \subseteq T'$ como

$$A' = \begin{cases} A \setminus \{\ell\}, & \text{si } \ell \in V(A), \\ A, & \text{si } \ell \notin V(A). \end{cases}$$

Si $\ell \notin V(A)$, entonces $A' = A$ y es subárbol de T' . Si $\ell \in V(A)$, entonces como A es conexo y ℓ es hoja, eliminar ℓ conserva la conexidad, de modo que $A' = A \setminus \{\ell\}$ es un subárbol de T' .

Ahora, sean $A, B \in \mathcal{T}$. Como A y B intersecan, existe $x \in V(A) \cap V(B)$. Si $x \neq \ell$, entonces $x \in V(A') \cap V(B')$. Si $x = \ell$ entonces $p \in V(A) \cap V(B)$ (de lo contrario no serían conexos), en particular, $p \in V(A') \cap V(B')$. Por tanto, cualesquiera dos elementos de $\mathcal{T}'$ intersecan.

Por hipótesis inductiva en T' y $\mathcal{T}'$, existe un vértice $v \in V(T')$ tal que $v \in V(A')$ para todo $A' \in \mathcal{T}'$. Como $v \neq \ell$, se sigue que $v \in V(A)$ para todo $A \in \mathcal{T}$. $\square$

8. Sea G una gráfica conexa y x un vértice de G . Un árbol generador de G es un árbol de x -distancias si para todo vértice y de G , se tiene que $d_T(x, y) = d_G(x, y)$.
 - a) Demuestre que para toda gráfica G y todo vértice x de G , existe un árbol de x -distancias en G .
 - b) Demuestre que toda gráfica conexa de diámetro d tiene un árbol generador de diámetro a lo mas $2d$.
9. Demuestre que todo automorfismo de un árbol fija un vértice o una arista.
10. Sea G una gráfica simple con conjunto de vértices $V = \{1, \dots, n\}$
 - a) Demuestre que el conjunto de transposiciones $S = \{(i\ j) : ij \in E\}$ genera a todas las permutaciones de V si y sólo si G es conexa.
 - b) Deduzca que G es un conjunto mínimo con la propiedad de generar a todas las permutaciones de V si y sólo si G es un árbol

Demostración. a) Sea $S = \{(i\ j) : ij \in E(G)\}$. Dada $(i\ j) \in S$. Como $ij \in E(G)$, los vértices i y j están una misma componente conexa de G , más aún, $(i\ j)$ sólo intercambia i y j y fija los demás vértices, por lo que preserva cada componente conexa. Como la composición de transposiciones que preservan componentes conexas también preserva componentes conexas, se deduce que para toda $\sigma \in \langle S \rangle$ y todo $v \in V$, los vértices v y $\sigma(v)$ pertenecen a la misma componente conexa de G .

Ahora bien, supongamos que $\langle S \rangle = S_n$. Dados dos vértices $x, y \in \{1, \dots, n\}$ la transposición $(x\ y)$ pertenece a $\langle S \rangle$ y $\sigma(x) = y$ por lo que están en la misma componente conexa de G . Como esto ocurre para cualesquiera $x, y \in V$, la gráfica G es conexa.

Supongamos ahora que G es conexa y sean $x, y \in V$ distintos. Como G es conexa, existe una trayectoria

$$x = p_0, p_1, \dots, p_m = y,$$

donde para cada i se tiene $p_i p_{i+1} \in E(G)$ y por tanto $(p_i p_{i+1}) \in S$. Notemos que

$$(x y) = (x p_1) \dots (p_{m-2} p_{m-1}) (p_{m-1} y) \dots (p_1 p_2) (x p_1).$$

Por lo que toda transposición $(x y)$ pertenece a $\langle S \rangle$ y por lo tanto $\langle S \rangle = S_n$.

- b) Sea $S_G = \{(ij) : ij \in E(G)\}$ mínimo con la propiedad de generar S_n . Por el inciso anterior, G es conexa.

Como S es mínimo, al eliminar cualquier arista $e \in E(G)$ la gráfica $G - e$ no puede ser conexa (si lo fuera S_{G-e} generaría a S_n) por tanto, cada arista de G es un puente. En consecuencia, G no contiene ciclos. Por lo tanto G es un árbol.

Supongamos ahora que G es un árbol. Entonces G es conexa y por el inciso anterior se sigue que $\langle S_G \rangle = S_n$.

Dado $e \in E(G)$, $G - e$ es desconexa. Por el inciso anterior S_{G-e} no puede generar S_n . Como esto ocurre para toda arista e , S_G es mínimo con la propiedad de generar todas las permutaciones de V .

□

11. Una *gráfica de Moore de diámetro d* es una gráfica regular de diámetro d y cuello $2d + 1$. Demuestre que si G es una gráfica de Moore, entonces todos los árboles de BFS de G son isomorfos.
12. Sea T un árbol arbitrario con $k + 1$ vértices. Demuestre que si G es simple y $\delta \geq k$, entonces G tiene una subgráfica isomorfa a T .

Demostración. Procedemos por inducción sobre k .

Si $k = 0$, entonces T tiene 1 vértice y cualquier gráfica G contiene una subgráfica isomorfa a T .

Sea T un árbol con $k + 1$ vértices. Como T es un árbol, existe una hoja ℓ con s su único vecino. Definiendo $T' := T - \ell$, este es un árbol con k vértices.

Como $\delta(G) \geq k$, se tiene en particular $\delta(G) \geq k - 1$. Por hipótesis inductiva, G contiene una subgráfica H isomorfa a T' . Sea

$$\varphi : V(T') \rightarrow V(H) \subseteq V(G)$$

un isomorfismo y $v := \varphi(s)$. La subgráfica H usa exactamente los k vértices $\varphi(V(T'))$, así que v es adyacente dentro de H a lo más a $k - 1$ vértices. En particular,

$$|N_G(v) \cap \varphi(V(T'))| \leq k - 1.$$

Como $\deg_G(v) \geq \delta(G) \geq k$, existe un vecino

$$w \in N_G(v) \setminus \varphi(V(T')).$$

Extendemos ahora φ definiendo $\varphi(\ell) := w$. La subgráfica de G inducida por $\varphi(V(T')) \cup \{w\}$ contiene a H y además la arista vw , y coincide con T bajo φ , pues la única arista adicional en T respecto de T' es ℓs , que se corresponde con wv .

Concluimos que G contiene una subgráfica isomorfa a T . $\square$

13. Demuestre que si G es un bosque con exactamente $2k$ vértices de grado impar, entonces existen k trayectorias ajenas por aristas $P_1, \dots, P_k$ en G tales que $E_G = \bigcup_{i=1}^k E_{P_i}$.

Demostración. $\square$

14. Demuestre que una sucesión $(d_1, \dots, d_n)$ de enteros positivos es la sucesión de grados de un árbol si y sólo si $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$.
15. Sean F y F' bosques sobre el mismo conjunto de vértices tales que F tiene menos aristas que F' . Demuestre que F' tiene una arista e tal que $F + e$ es un bosque.

Demostración. Sea V el conjunto de vértices común a F y F' , t el número de componentes conexas de F y s el número de componentes conexas de F' . Como F es un bosque

$$|E(F)| = |V| - t \quad \text{y} \quad |E(F')| = |V| - s$$

Como $|E(F)| < |E(F')|$ entonces $|V| - t < |V| - s$ de donde $s < t$.

Consideremos ahora las t componentes de F . Si toda arista de F' tuviera ambos extremos en una misma componente de F , ninguna arista de F' uniría dos componentes distintas de F por lo que todo camino en F' que empieza en una componente de F permanecería dentro de esa misma componente lo que implica que cada componente conexas de F' estaría contenida en alguna componente de F , con esto, F' tendría al menos t componentes conexas, es decir, $s \geq t$ pero $s < t$, entonces existe al menos una arista $e \in E(F')$ con extremos en dos componentes distintas de F . Al agregar e a F , dicha arista conecta dos componentes distintas, así que no puede crear un ciclo. Por lo tanto $F + e$ sigue siendo acíclico, y en consecuencia es un bosque. $\square$

16. Demuestre que una gráfica es 2-conexa por aristas si y sólo si admite una orientación fuertemente conexas.

Demostración. Supongamos que G admite una orientación D que es fuertemente conexas. Sea $e = uv$ una arista de G y supongamos que en D está orientada como $u \rightarrow v$. Como D es fuertemente conexas, existe un camino dirigido de v a u . Al concatenar ese camino con la flecha $u \rightarrow v$ obtenemos un ciclo dirigido que contiene a e . En particular, e pertenece a un ciclo en

la gráfica subyacente, por lo que e no es un puente. Como e fue arbitraria, G no tiene puentes. Además, como D es fuertemente conexa, la gráfica subyacente es conexa. Por lo tanto G es 2-conexa por aristas.

Sea G 2-conexa por aristas y $x, y \in V$ vértices distintos, sabemos entonces que existen 2 caminos disjuntos por aristas, sean estos

$$\begin{aligned}x &= p_0, p_1, \dots, p_m = y \\ y &= q_0, q_1, \dots, q_k = x\end{aligned}$$

Asignemos orientaciones de forma que $p_i \rightarrow p_{i+1}$ con $i \in \{0, \dots, m-1\}$ y $q_j \rightarrow q_{j-1}$ con $j \in \{1, \dots, k\}$. Dado cualquier otro vértice $z \in V \setminus \{x, y\}$ si los caminos entre w y x o w y y utilizan algún pedazo con dirección previamente ya asignada, asignamos una dirección consistente a la anterior, si no, asignamos dirección de forma análoga al caso anterior. Procediendo de esta manera para todo vértice que no hayamos tomado previamente y asignando direcciones aleatorias a cualquier otra arista si no fue previamente asignada una dirección, concluiremos con una orientación fuertemente conexa. $\square$

17. Demuestre que son equivalentes para una gráfica G :

- a) G es un bosque.
- b) Toda subgráfica inducida de G tiene un vértice de grado a lo más 1.
- c) Toda subgráfica conexa de G es inducida.
- d) El número de componentes conexas de G es $|V| - |E|$.

Demostración. ■ $a) \Rightarrow b)$ Sea D una subgráfica inducida, esta es de nuevo un bosque (al ser acíclica). Si $|E(D)| = 0$ entonces todo vértice tiene grado 0. Si $|E(D)| \neq 0$, como cada componente conexo es un árbol, en este hay al menos dos vértices de grado uno.

■ $b) \Rightarrow a)$ Procedamos por contraposición, si G no es un bosque existe un ciclo C en G , entonces, la subgráfica inducida por C contiene al menos a este ciclo por lo que ningún vértice tiene grado menor o igual que dos.

■ $(a) \Rightarrow (c)$. Suponga que G es un bosque y sea H una subgráfica conexa de G . Tomemos dos vértices $u, v \in V(H)$ tales que $uv \in E(G)$. Como H es conexa, existe una uv -trayectoria P en H . Si $uv \notin E(H)$, entonces P tiene longitud al menos 2 y la arista uv junto con P forman un ciclo en G , lo cual no puede ocurrir porque G es un bosque. Por tanto, necesariamente $uv \in E(H)$.

■ $(c) \Rightarrow (a)$. Supongamos que no es un bosque por lo que G tiene un ciclo C , sea $e \in E(C)$ y $H = C - e$. Entonces H es conexa y tiene los mismos vértices que C , pero la arista e tiene ambos extremos en $V(H)$ y no pertenece a $E(H)$ por lo que es una subgráfica conexa no inducida.

- $(a) \Rightarrow (d)$. Sea G un bosque con componentes conexas $C_1, \dots, C_t$. Cada C_i es un árbol, así que

$$|E(C_i)| = |V(C_i)| - 1.$$

Sumando sobre i se obtiene

$$|E| = \sum_{i=1}^t |E(C_i)| = \sum_{i=1}^t (|V(C_i)| - 1) = |V| - t,$$

y por tanto $t = |V| - |E|$.

- $(d) \Rightarrow (a)$. Suponga que el número de componentes conexas de G es $t = |V| - |E|$ y sean $C_1, \dots, C_t$ estas. Para cada i , la componente C_i es conexa, así que se cumple

$$|E(C_i)| \geq |V(C_i)| - 1.$$

Sumando en i ,

$$|E| = \sum_{i=1}^t |E(C_i)| \geq \sum_{i=1}^t (|V(C_i)| - 1) = |V| - t = |E|.$$

Por lo tanto hay igualdad en cada sumando, es decir,

$$|E(C_i)| = |V(C_i)| - 1$$

para todo i por lo que toda componente es un árbol y por lo tanto G es un bosque. □

18. Demuestre que todo árbol tiene una hoja en la parte mas grande de una bipartición, o en ambas partes si tienen la misma cardinalidad.

Demostración. □

19. Sea T un árbol. Sin utilizar contradicción, demuestre que todos los vértices de T tienen grado impar si y sólo si para cada arista e de T , ambas componentes de $T - e$ tienen un número impar de vértices.

Demostración. □

20. Sea G un bosque. Demuestre que son equivalentes para G :

- a) Borrar todos los vértices de grado 1 da lugar a un bosque lineal.
- b) No contiene como subgráfica inducida a la gráfica obtenida de la garra al subdividir cada arista.

- c) Todo vértice de grado al menos 3 tiene a lo más dos vecinos que no son hojas.
 - d) Cada componente conexa contiene una trayectoria que contiene a todos los vértices de grado dos o más.
21. Demuestre que G es un bosque si y sólo si su conjunto de vértices admite un orden lineal $<$ tal que para cada vértice u a lo más uno de sus vecinos v cumple que $u < v$.

Demostración.

□