Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Los teoremas del rey gallina

Notas

PRESENTA:

Diego Ligani Rodríguez Trejo

Índice general

1. Teoremas de Existencia **7**

2. Teoremas de Probabilidad **15**

3. Dualidad **19**

A. teoremas en el lenguaje de teoría de gráficas **23**

Capítulo 1

Teoremas de Existencia

Definición 1.1. *Gallinero*

Formalmente, llamaremos un gallinero al par ordenado $G = (C, P)$, donde C es un conjunto finito y no vacío cuyos elementos llamaremos gallinas, y P es una relación binaria tal que:

1. *Para todo $c, d \in C$, $(c, d) \in P$ o $(d, c) \in P$.*
2. *Si $(c, d) \in P$, entonces $(d, c) \notin P$.*

En particular, la relación P puede representar la relación "c pica a d".

Con estas definiciones, un gallinero puede ser representado como una digráfica Dcuyos vértices son las gallinas de C, y entre dos gallinas c y d habrá una flecha (c, d) si y solo si $(c, d) \in$P.

Esto nos permite notar que la digráfica asociada a un gallinero G es completa y sin flechas simétricas; es decir, es un torneo. De esta manera, los teoremas que probemos a partir de ahora son válidos para cualquier torneo. Dado esto, podríamos utilizar términos estándar de la teoría de gráficas, pero hemos decidido mantener la terminología de la teoría de gallinas para recordar el origen del estudio y porque suena más divertido.

No obstante, debajo de cada teorema escribiremos la versión con terminología estándar de la teoría de gráficas.

Definición 1.2. *Rey*

Diremos que una gallina $c \in C$ es un rey en el gallinero G si y solo si para todo $d \in C$, c pica a d o existe $b \in C$ tal que c pica a b y b pica a d.

Teorema 1.1. *Todo gallinero tiene un rey.*

Demostración. Sea $S(x)$ el conjunto de gallinas a las que x pica. Elijamos $c \in C$ como una gallina tal que $S(c)$ tenga cardinalidad máxima; probemos que c es un rey.

Supongamos que no lo es. Debe existir $d \in C$ que no es dominado en a lo sumo dos pasos por c. Esto implica que deben suceder dos cosas:

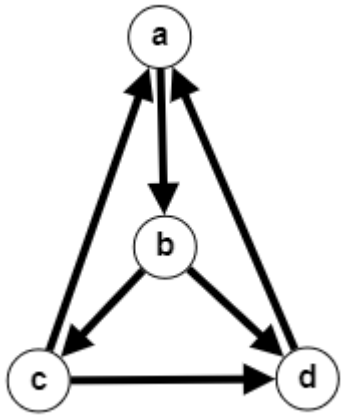
1. $(d, c) \in F(D)$, ya que c no puede picar a d.
2. Para todo $b \in S(c)$, debemos tener $(d, b) \in F(D)$, ya que b no puede picar a d, porque si lo hiciera, c dominaría a d en dos pasos a través de b.

Por lo tanto, $|S(c)| \leq |S(d)|$, ya que $S(d)$ tiene al menos todos los elementos de $S(c)$ y a c mismo, lo que es una contradicción.

Esto contradice la elección de c, por lo tanto, c domina a todas las demás gallinas de C en a lo sumo dos pasos, es decir, c es un rey. □

Cororlario 1.1.1. *Sea s el número máximo de gallinas que son picadas por una gallina. Si $|S(c)| = s$, entonces c es un rey.*

Aunque observemos que el recíproco no es necesariamente cierto, veamos el ejemplo:



Aquí notamos que a es un rey, pero $|S(a)| = 1$ y $|S(b)| = |S(c)| = 2$.

Teorema 1.2. *En un gallinero, si una gallina es picada, es picada por un rey.*

Demostración. Sea $c \in C$ supongamos que c es picada, definamos los siguientes conjuntos

$$D_c = \{g \in C : (g, c) \in P\}$$
$$S_c = \{g \in C : (c, g) \in P\}$$

entonces $D_c \neq \emptyset$ por lo que podemos pensar a D_c como un gallinero, que por el teorema anterior sabemos que tiene un rey, sea este d, probemos ahora que es un rey en C, sea $e \in C = D_c \cup S_c \cup \{c\}$ sabemos que d domina a todo elemento de $D_c \cup \{c\}$ por construcción y d domina a toda gallina de S_c en dos pasos, ya que c pica a toda gallina en S_c.

De esta manera, c es picada por d y d es un rey en C. □

El concepto de rey, aunque intuitivo presenta también problemas, cuando pensamos en la imagen de un rey, pensamos en alguien que gobierna sobre todos los demás habitantes y a su vez nadie gobierna sobre el, lo cual la definición permite, por otro lado, quisiereamos incluso en el caso de que un rey no sea único, sea al menos raro, desafortunadamente probaremos que ambas expectativas son falsas, no solo todo gallinero tiene un rey, si no que es bastante probable que toda gallina sea rey en un gallinero.

Con esta idea, daremos una definición distinta que represente mejor la idea intuitiva que tenemos de rey, aunque mostraremos después que esta definición tiene también sus problemas.

Definición 1.3. *Emperador*

> *Sea $c \in C$ diremos que c es un emperador si y solo si c pica a todas las demás gallinas de C.*

Esta definición cumple con la idea intuitiva de dominar directamente a todas las gallinas de un gallinero, mostremos ahora que también cumple la unicidad.

Teorema 1.3. *Un gallinero G tiene un emperador si y solo si G tiene un único rey.*

Demostración. $\Rightarrow$ Si G tiene un emperador, sea este e este es claramente un rey, ya que domina a todas las demás gallinas directamente, así supongamos que tiene otro, sea este c por definición tenemos que c pica a e o existe $b \in C$ tal que c pica a b y b pica a e, ambos casos son contradictorios ya que implicarían la existencia de una gallina que pica a e lo cual no puede suceder ya que e pica a todas las demás gallinas.

$\therefore$ G tiene un único rey.

$\Leftarrow$ Si G tiene solo un rey, sea este c supongamos que G no tiene emperador, esto implica que $\exists d \in C$ tal que c no pica a d por lo que tenemos que tener que d pica a c, por el teorema anterior, sabemos que si c es picada, alguno de las gallinas que la pican debe ser rey, lo cual implica la existencia de otro rey ! ya que por hipótesis G tenía un único rey.

Esto vino de suponer que G no tenía emperador.

$\therefore$ G tiene un emperador. $\square$

Ya que hemos probado que en cualquier gallinero siempre hay un rey, busquemos una cota del otro lado, es decir, preguntémonos cuantos reyes puede tener un gallinero y si hay alguna condición que limite la cantidad de reyes que podamos tener, como mencionamos previamente, los resultados a los que llegaremos no son precisamente alentadores.

Teorema 1.4. *No existen gallineros con exactamente dos reyes.*

Demostración. Supongamos que existe uno, sea G gallinero con exactamente dos reyes, sean estos c y d, como por hipótesis c domina a d en a lo más dos pasos, debemos tener en particular que c es picado, además por teorema 1,2

tenemos que c debe ser picado por un rey, como no puede ser picado por si mismo, debemos tener que d pica a c.

Por un argumento análogo podemos concluir que c pica a d !, ya que no podíamos tener flechas simétricas.

$\therefore$ No hay gallineros con exactamente dos reyes. $\square$

Los siguientes teoremas que probaremos muestran grandes problemas con la definición de rey, no solo sabemos que siempre existe uno y que eso no limita la existencia de otros a menos que pidamos condiciones extremas, (ser emperador), si no que probaremos que siempre se puede tener que en un gallinero todas las gallinas sean reyes y mas adelante probaremos que no solo es posible, si no que es altamente probable.

Definición 1.4. $(n,k)-$ *gallinero*

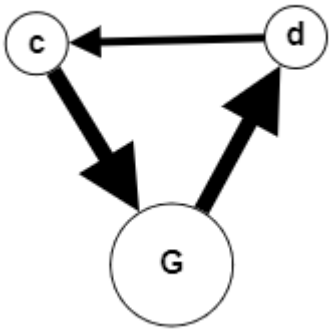
Sea $G=(C,P)$ un gallinero, diremos que es un $n-$ gallinero si y solo si $|C|=n$ y diremos que G es un $(n,k)-$ gallinero si y solo si es un $n-$ gallinero con k reyes.

Teorema 1.5. *Sean $n,k\in\mathbb{Z}^+$ tales que $n\geq k\geq 1$, existen $(n,k)-$ gallineros, salvo cuando $k=2$ y cuando $k=n=4$.*

La prueba de este teorema, aunque sencilla requiere el uso de cuatro lemas auxiliares que procederemos a enunciar y probar.

Lema 1.5.1. *Si existe un $(n,n)-$gallinero, existe un $(n+2,n+2)-$gallinero.*

Demostración. La idea de la demostración está dada por la siguiente gráfica.



Ahora demos el argumento, sea $G=(C,P)$ un $(n,n)-$ *gallinero* definamos un nuevo gallinero $F=(C',P')$ con

$$C' := C\cup\{c,d\} \text{ y } P' := P\cup\{(c,g):g\in C\}\cup\{(g,d):g\in C\}\cup\{(d,c)\}$$

Es claro que $|C'| = n + 2$ ahora, probemos que hay $n + 2$ reyes, dividamos la prueba en 3 casos, sea $g \in C'$.

Si $g \in C$ sabemos que g domina a cualquier otro elemento de C en a lo más dos pasos por hipótesis y por construcción domina a d directamente y a c en dos pasos a través de d.

Si $g = c$ por construcción, c domina a cualquier elemento de C directamente y a d en dos pasos a través de un elemento de C.

Si $g = d$ por construcción d domina a C en dos pasos a través de c y a c directamente.

En cualquier caso, cualquier elemento de C' es rey, es decir hay $n+2$ reyes.

$\therefore F$ es un $(n + 2, n + 2) - gallinero.$ □

Lema 1.5.2. *Existe un* $(1, 1) - gallinero.$

Demostración. Cualquier gallina es un $(1, 1)$ gallinero. □

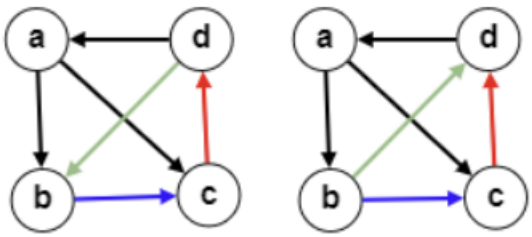
Lema 1.5.3. *No hay* $(4, 4) - gallineros.$

Demostración. Hagamos la prueba por casos, primero notemos que no puede haber emperadores por 1.3 y de manera análoga, no puede haber una gallina que sea picada por todas las demás, ya que no podría dominar a las demás en a lo mas dos pasos por lo que no sería rey.

Así sea $G = (C, P)$ con $C = \{a, b, c, d\}$ sin perdida de generalidad, supongamos que $(a, b), (d, a) \in P$ veamos que en todas las digráficas asociadas a este gallinero (o isomorfismos de ellas), no pueden haber 4 reyes.

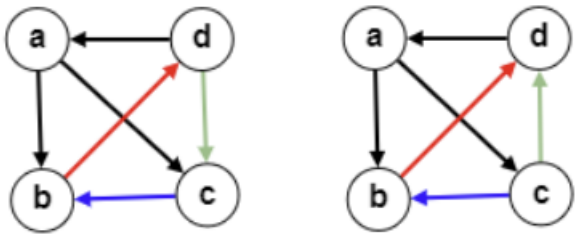
Hagamos esto dando todas las posibilidades para las flechas las flechas tendrán los siguientes colores, una flecha azul es una elección hecha, una flecha roja significa que forzosamente debe tener esa dirección, por lo argumentado arriba, y una flecha verde son las opciones que podemos tener.

Primero supongamos que $(a, c) \in P$, si $(b, c) \in P$



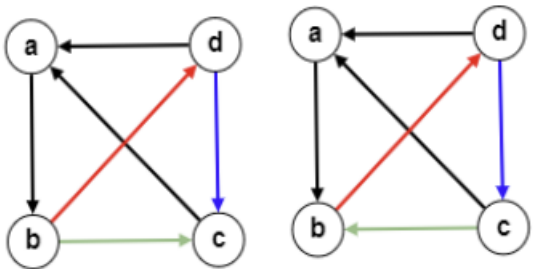
En cualquiera de estos dos casos, no todas las gallinas son reyes, en el primer caso b no domina a a en a lo mas dos pasos, en el segundo c no domina a b en a lo mas dos pasos.

Si $(c, b) \in P$



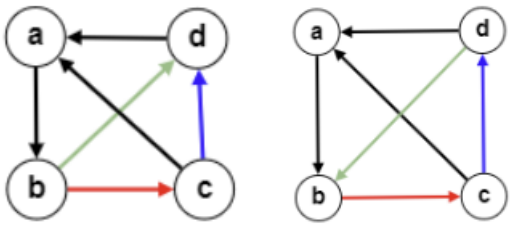
c no domina a a en a lo más dos pasos, en el segundo b no domina a c en a lo mas dos pasos.

Ahora, supongamos que $(c, a) \in P$ si $(d, c) \in P$



c no domina a d en a lo más dos pasos, en el segundo a no domina a c en a lo mas dos pasos.

Si $(c, d) \in P$



d no domina a c en a lo más dos pasos, en el segundo a no domina a d en a lo mas dos pasos.

Notemos que estos son todos los casos posibles (sin contar isomorfismos) para un $4 - gallinero$ y en ninguno de ellos tenemos 4 reyes.

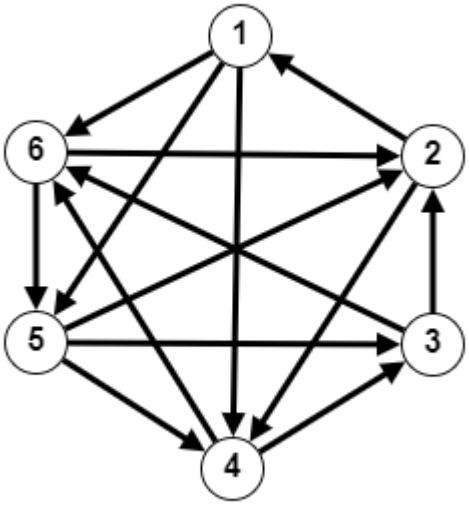
$\therefore$ No hay $(4, 4) - gallinero$. □

Lema 1.5.4. *Existe un* $(6, 6) - gallinero$.

Demostración. Como este es una prueba de existencia, solo tenemos que mostrar un $(6, 6) - gallinero$ la siguiente digráfica representa uno.

□

Finalmente, con estos 4 lemas, podemos finalmente probar el teorema 1.5 que recordemos, dice



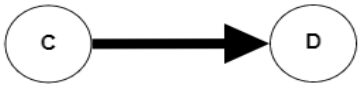
Teorema. *Sean $n, k \in \mathbb{Z}^+$ tales que $n \geq k \geq 1$, existen $(n,k)-$ gallineros, salvo cuando $k = 2$ y cuando $k = n = 4$.*

Demostración. Por 1.5.1, 1.5.2, 1.5.4 tenemos que existen $(k,k)-$*gallinero* para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$ salvo $k = 2, 4$ así, sea $n \in \mathbb{Z}^+$ si $n = 1$ solo podemos tener un $(1,1)-$ *gallinero* que sabemos existe por 1.5.2, así supongamos que $n \neq 1$ y sea $k \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{2\}$ tal que $n > k$.

Sea G el $(k,k)-$ *gallinero* con $G = (C, P)$, $D := \{c_1, \cdots, c_{n-k}\}$ gallinas no en C, el orden de como se piquen las gallinas de D no es importante así que elijamos un orden Q arbitrariamente y definamos $F = (C', P')$ con

$$C' = C \cup D \text{ y } P' = P \cup Q \cup \{(c,d) : (c \in C) \wedge (d \in D)\}$$

Es decir, un gallinero con n gallinas tal que todas las gallinas de C piquen a todas las gallinas de D y el orden de picado se mantenga en cualquier otro caso.



Probemos que F así definido es un $(n,k)-$ *gallinero*, es claro que $|C'| = n$, veamos que las gallinas originalmente en C son reyes en F.

Sea $c \in C$ por construcción c domina a cualquier gallina de C en a lo más dos pasos y a cualquier gallina de D directamente, por lo que toda gallina de C es rey en F.

Sea $c \in D$ c no puede ser rey ya que no hay manera en la que domine a cualquier gallina en C en a lo más dos pasos ya que solo puede dominar a gallinas de D que a su vez, no pueden dominar a gallinas de C por lo tanto, ninguna gallina de D es rey.

$\therefore G$ es un $(n, k) - gallinero.$ $\square$

Capítulo 2

Teoremas de Probabilidad

Iniciemos estableciendo condiciones que asumiremos, primero, es razonable pensar que dada una pareja de gallinas, $\{c, d\}$ la probabilidad de que una pique a otra es $\frac{1}{2}$ además, como cada $n - gallinero$ tiene $\binom{n}{2}$ parejas no ordenadas de gallinas, para cada pareja hay dos posibilidades del orden de picado igualmente posibles, de esta manera, en un $n-gallinero$ hay $2^{\binom{n}{2}}$ pares de picado igualmente posibles.

Definición 2.1. *n-gallinero aleatorio*

> *Diremos que un $n-gallinero$ es un $n-gallinero$ aleatorio si y solo si para toda pareja de gallinas, $\{c, d\}$ la probabilidad de que una pique a otra es $\frac{1}{2}$.*

Antes de continuar, demos un breve recordatorio de propiedades de probabilidad que utilizaremos adelante.

Sea E un evento, denotaremos $Pr(E)$ a la probabilidad de que el evento E suceda, si $\{E_i\}$ es un conjunto de eventos y $\bigcup_i E_i$ el evento donde alguno de los E_i sucede, tendremos que

$$Pr(\bigcup_i E_i) \leq \sum_i Pr(E_i) \tag{2.1}$$

Donde la igualdad se da si y solo si E_i son eventos mutuamente exclusivos.

También, dado un evento E_i si denotamos $\overline{E_i}$ al evento "no sucede E_i", entonces

$$Pr(\overline{E_i}) = 1 - Pr(E_i) \tag{2.2}$$

Teorema 2.1. *La probabilidad de que en un n-gallinero aleatorio haya un emperador es $n(\frac{1}{2})^n$.*

Demostración. Sea $C = \{c_1, \cdots, c_n\}$ y definamos E_i el evento "c_i es emperador", sabemos que existe a lo más un emperador, por lo que los eventos E_i son

mutuamente exclusivos y que toda gallina tiene la misma probabilidad de serlo, así

$$Pr(\bigcup E_i) = \sum_{i=1}^{n} Pr(E_i) = nPr(E_j)$$

Para algún j, más aún, como para ser emperador c_j debe picar a otras $n-1$ gallinas, la probabilidad de que esto suceda es $(\frac{1}{2})^n$ dado esto

$$Pr(\bigcup E_i) = nPr(E_j) = n(\frac{1}{2})^n$$

□

Cororlario 2.1.1. *La probabilidad de que un n.gallinero aleatorio tenga un emperador se aproxima a 0 cuando $n \to \infty$.*

Sabiendo esto, podemos ver uno de los problemas de la definición de emperador, que mientras más gallinas haya es cada vez menos probable que exista un emperador, lo que al menos coincide con la intuición de que en un gallinero, sería extremadamente raro que una gallina pique a todas las demás.

Veamos finalmente el teorema que nos confirma los problemas con la definición de rey.

Teorema 2.2. *La probabilidad de que toda gallina sea rey en un n-gallinero aleatorio se aproxima a 1 cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Sea G un n-gallinero aleatorio y sea $Pr(n)$ la probabilidad de que toda gallina sea rey, según lo hablado antes, la probabilidad de que no toda gallina sea rey es $\overline{Pr(n)} = 1 - Pr(n)$ como esta cantidad es difícil de computar, daremos una cantidad mayor y veremos que se aproxima a 0 cuando $n \to \infty$.

Para que no toda gallina ser rey, debe existir al menos una gallina $c \in C$ tal que, existe $d \in C$ a la que c no domina en a lo más dos pasos, sea $E_{(c,d)}$ el evento "c no domina a d en a lo más dos pasos", además como para cualquier pareja $c, d \in D$ da lo mismo si tenemos $E_{(d,c)}$ o $E_{(c,d)}$ (en cualquier caso, tenemos una gallina que no es rey) podemos tener $n(n-1)$ parejas de este estilo, por 2.1 tendremos lo siguiente

$$\overline{Pr(n)} = Pr(\bigcup_{c,d \in C} E_{(c,d)}) \leq \sum_{c,d \in C} Pr(E_{(c,d)}) = n(n-1)Pr(E_{(c,d)})$$

Por lo que $\overline{Pr(n)} \leq n(n-1)Pr(E_{(c,d)})$, dado esto, enfoquémonos en calcular $Pr(E_{(c,d)})$, como discutimos arriba, la probabilidad de que c no pique a d es $\frac{1}{2}$ y dado b una gallina arbitraria distinta a c y d, la probabilidad que c no domine a d a través de b es de $\frac{3}{4}$ veamos esto analizando los casos posibles entre b, c, d.

1. Si c pica a b y b pica a $d \to b$ domina a d.
2. Si c pica a b y b no pica a $d \to b$ no domina a d.
3. Si no c pica a b y b pica a $d \to b$ no domina a d.

4. Si no c pica a b y b no pica a $d \to b$ no domina a d.

Finalmente, como la elección para b fue completamente arbitraria entre $n-2$ gallinas, tendremos que

$$Pr(E_{(c,d)}) = (\frac{1}{2})(\frac{3}{4})^{n-2} = (\frac{1}{2})(\frac{16}{9})(\frac{3}{4})^{n} = \frac{8}{9(\frac{4}{3})^{n}}$$

Dado esto

$$\overline{Pr(n)} \leq n(n-1)Pr(E_{(c,d)}) = \frac{8n(n-1)}{9(\frac{4}{3})^{n}}$$

Donde notemos, el numerador es una expresión polinómica mientras que el denominador es exponencial, es decir la probabilidad $\overline{Pr(n)}$ se aproxima a 0 cuando $n \to \infty$ por lo que $Pr(n)$ se aproxima a 1. □

Cororlario 2.2.1. *Sea $k(n)$ el promedio de reyes en un n-gallinero aleatorio, cuando $n \to \infty$ $k(n) - n \to 0$.*

Como comentamos arriba, esto es el último clavo en la definición de rey, ya que no solo hemos probado que puede haber cualquier cantidad de reyes sin posibilidad de acotarlos, hemos probado que lo más probable es que toda gallina sea rey en un n- gallinero aleatorio, esto sin embargo no debe desmotivarnos a utilizar la teoría desarrollada hasta ahora para jugar con otras definiciones y utilizar un concepto raramente visto en matemáticas pero extremadamente fuerte, la dualidad.

Capítulo 3

Dualidad

Como comentamos al final de la sección anterior, utilizaremos lo desarrollado en las secciones previas para dar un ejemplo de dualidad y como puede ser una herramienta extremadamente fuerte, con esto en mente, empecemos introduciendo conceptos duales a rey y emperador.

Definición 3.1. *Siervo y Esclavo*

> *Dada una gallina $c \in C$ diremos que c es un siervo si y solo si c es dominada por cualquier otra gallina de C en a lo más dos pasos, diremos que c es un esclavo si y solo si c es picada por toda gallina de C directamente.*

Notemos como estos conceptos son duales a los conceptos de rey y emperador respectivamente, así, no deberla de extrañar la suposición que el dual de todo teorema demostrado previamente sea cierto también, para ser más claros, si en cada teorema anterior hacemos los siguientes cambios.

1. Picar $\leftrightarrow$ Ser picado.
2. Rey $\leftrightarrow$ Siervo.
3. Emperador $\leftrightarrow$ Esclavo.

Obtendremos una serie de teoremas igualmente validos, en vez de probar cada teorema de nuevo, argumentemos por que sucede esto.

Notemos que el concepto fundamental en nuestra teoría fue el orden de picado P, es decir, todo lo demás fue definido en base a esta relación binaria, ahora, el nombre que le dimos a la relación P es realmente irrelevante, decidimos arbitrariamente decir que $(c, d) \in P$ significa c pica a d, pero si cambiáramos P por una nueva relación P^* (en particular, podemos pensar en P^* la relación c es picado por d) con las mismas cualidades, las demostraciones dadas anteriormente serían igual de validas.

Con esto, la dualidad no solo nos da una serie de teoremas igualmente validos, si no que da pauta a pensar en nuevos teoremas que nos indiquen como

se relacionan los nuevos conceptos obtenidos, en particular por teorema 2.2 sabemos que en un n-gallinero aleatorio, a más gallinas es más probable que toda gallina ser rey y por la dualidad, es también más probable que toda gallina sea siervo, de esta manera, es natural pensar en el siguiente resultado

Teorema 3.1. *Sea $P_{ks}(n)$ la probabilidad de que toda gallina en un n-gallinero aleatorio sea rey y siervo, cuando $n \to \infty$, $P_{ks}(n) \to 1$.*

Demostración. Sea G un n-gallinero aleatorio, sean E, E' los eventos "Toda gallina es rey en G" y "Toda gallina es siervo en G" y $\neg E, \neg E'$ sus negaciones.

$$Pr(\neg E \cup \neg E') \leq Pr(\neg E) + Pr(\neg E') \Rightarrow 1 - Pr(\neg E \cup \neg E') \geq 1 - (Pr(\neg E) + Pr(\neg E'))$$

Además, recordemos que $\neg E \cup \neg E'$ es el evento "no toda gallina es rey o no toda gallina es siervo" que notemos es la negación de $E \cap E'$, es decir el evento "Toda gallina es rey y siervo" por lo que

$$\begin{aligned} Pr(E \cap E') &= 1 - Pr(\neg E \cup \neg E') \geq 1 - (Pr(\neg E) + Pr(\neg E')) \\ &= (1 - Pr(\neg E)) + (1 - Pr(\neg E')) - 1 = Pr(E)) + Pr(E') - 1 \end{aligned}$$

De esta manera, cuando $n \to \infty$ sabemos que $Pr(E)) + Pr(E') \to 2$ por lo que todo el lado derecho se aproxima a 1.

Además, por definición de probabilidad sabemos que $Pr(E \cap E') \leq 1$ por lo que $Pr(E \cap E') \to 1$.

Finalmente notemos que $P_{ks}(n) = Pr(E \cap E')$. □

Concluyamos con lo siguiente

Teorema 3.2. *Sea G un n-gallinero aleatorio, toda gallina es rey en G si y solo si toda gallina es siervo en G.*

Demostración. Toda gallina es rey en $G \Leftrightarrow$ toda gallina es dominada en a lo mas dos pasos por toda otra gallina $\Leftrightarrow$ toda gallina es siervo en G. □

Sabiendo que nuestras definiciones de rey, emperador, siervo y esclavo tienen estos problemas, intentemos dar algunas otras ideas que parecerían una opción razonable a las definiciones actuales y veamos cuales son los problemas de estas, la primera de ellas surge de notar que, para definir emperador, pedimos que la dominancia fuera directa, y para definir rey pedimos que la dominancia fuera en a lo más dos pasos, por lo que suena sensato pensar en relajar la condición de dominancia aun más, a tres cuatro o n pasos.

Definición 3.2. *k-Rey*

> *Sea $G = (C, P)$ un n-gallinero y $k \in \mathbb{Z}^+$, diremos que $c \in C$ es un k-Rey en G si y solo si domina a toda otra gallina d en C en a lo más k pasos.*

Teniendo esto, podemos notar que los emperadores serán 1-Reyes, a lo que llamamos reyes podemos renombrarlos 2-Reyes y así sucesivamente.

El problema con los k-Reyes se vuelve evidente cuando pensamos lo siguiente, no es difícil notar que cualquier n-Rey será también $n+1$-Rey ya que si domina a todas las demás gallinas en a lo más n pasos, las dominará también en $n+1$ pasos, por lo que tendremos que la probabilidad de que toda gallina en un n-gallinero sea k-Rey no solo tiende a 1 mientras más gallinas tengamos, manteniendo los problemas que tenían los 2-Reyes si no que tiende a 1 aún más rápido que en el caso visto, ya que no solo todo 2-Rey será k-Rey, si no que puede haber aún más.

Otra idea puede ser, dado un gallinero G, fijémonos ahora en el subgallinero, G_1 compuesto únicamente de los reyes de G este es un subconjunto no vacio, repitamos este proceso obteniendo ahora G_2, continuando esto notemos que tenemos una sucesión descendiente de conjuntos no vacíos, por lo que debe suceder en algún punto que $G_k = G_{k+1}$ (gracias al axioma de buena fundación) los miembros de este conjunto serán las gallinas que buscamos, definamos esto formalmente.

Definición 3.3. *Rey de reyes*

Sea $G = (C, P)$ un n-gallinero, definamos recursivamente lo siguiente:

$$\begin{cases} C_0 = C \\ C_{i+1} = \{c \in C_i : \ c \text{ es rey en } C_i\} \end{cases}$$

y análogamente

$$\begin{cases} P_0 = P \\ P_{i+1} = P|_{C_{i+1}} \end{cases}$$

Diremos que una gallina c es un Rey de reyes si y solo si $c \in C_k$ tal que $C_k = C_{k+1}$

Por lo discutido arriba, el conjunto C_k siempre va a existir y será no vacio, por lo que estamos definiendo algo, el problema aquí es el teorema 2.2 ya que este nos dice que mientras más grande elijamos a n más rápidamente la sucesión de subgallineros G_i se dentendrá y más coincidirá con nuestro gallinero original.

Apéndice A

teoremas en el lenguaje de teoría de gráficas

Teorema (1)**.** *En todo torneo existe un vértice que domina a cualquier otro en a lo más dos pasos (un rey)*

Teorema (2)**.** *Sea T un torneo y $v \in V(T)$ existe un rey en $N^-(v)$*

Teorema (3)**.** *Un torneo tiene un emperador si y solo si tiene un único rey*

Teorema (4)**.** *No hay torneos que tengan exactamente dos reyes*

Teorema (5)**.** *Sean $n, k \in \mathbb{Z}^+$ tales que $n \geq k \geq 1$, existen $(n, k) - torneos$, salvo cuando $k = 2$ y cuando $k = n = 4$.*

Teorema (6)**.** *La probabilidad de que en un n-torneo aleatorio haya un emperador es $n(\frac{1}{2})^n$.*

Teorema (7)**.** *La probabilidad de que todo vértice sea rey en un n-torneo aleatorio se aproxima a 1 cuando $n \to \infty$.*

Teorema (8)**.** *Sea $P_{ks}(n)$ la probabilidad de que todo vértice en un n-torneo aleatorio sea rey y siervo, cuando $n \to \infty$, $P_{ks}(n) \to 1$.*

Teorema (9)**.** *Sea G un n-torneo aleatorio, todo vértice es rey en G si y solo si todo vértice es siervo en G.*